CHAPITRE N°3 **PARTIE B** **TS**

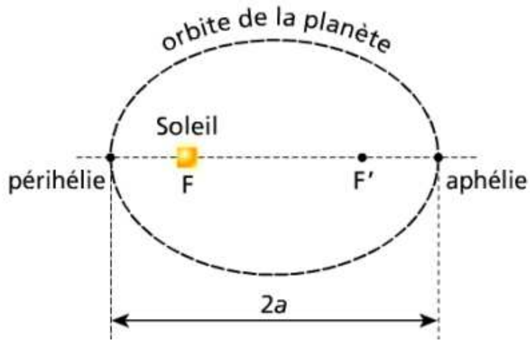
MOUVEMENTS DES SATELLITES ET DES PLANETES

I. Les trois lois de Kepler :

Au XVIIème siècle, Johannes Kepler (1571-1630) constate que les planète tournent autour du soleil selon des trajectoires qui ne sont pas parfaitement circulaires et énonce trois lois pour décrire leur mouvement.
Ces trois lois s'appliquent dans le référentiel héliocentrique en considérant une planète du système solaire comme le système matériel étudié.

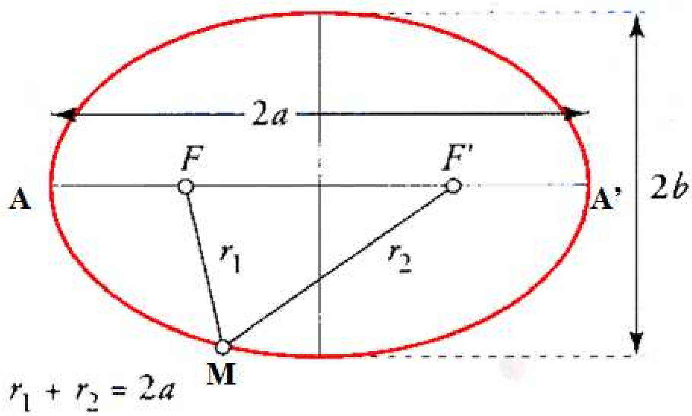
1. 1ère loi de Kepler : la loi des orbites :

Dans le référentiel héliocentrique, le centre de chaque planète décrit une trajectoire elliptique dont le Soleil S est l'un des foyers.



Mise à part Mercure et Pluton, les planètes du système solaire on des **trajectoires pratiquement circulaires**.

Remarque : qu'est-ce qu'une ellipse au sens mathématiques :



Une ellipse est formée par l'ensemble des points dont la somme des distances à deux points fixes (les foyers F et F') est constante : MF + MF' = AA' = 2a (AA' est le grand axe)

On définie l'excentricité de l'ellipse par :

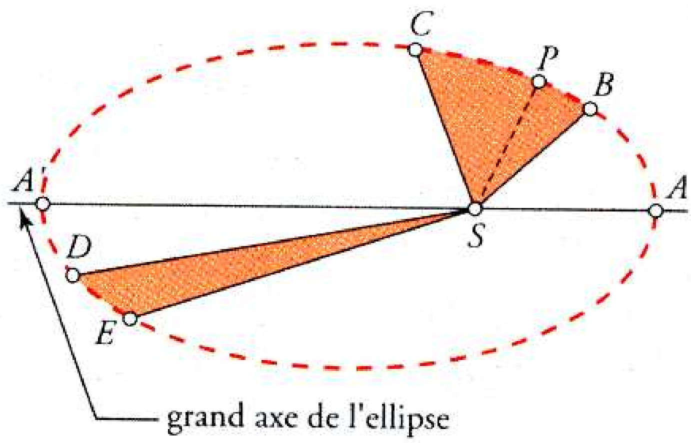
$$\boxed{e = \frac{FF'}{AA'}}$$

Si e=0 (FF'=0), l'ellipse devient un cercle

2. 2ème loi de Kepler : la loi des aires :

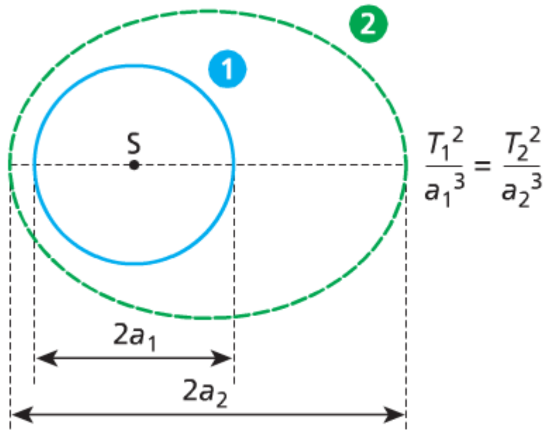
Le rayon [SP] qui relie la planète P au soleil S balaie des aires égales en des temps égaux.

Conséquences :
Les aires des triangles SBC et SDE sont égales.
La portion d'ellipse BC est parcourue dans le même temps que la portion DE, ce qui implique que la planète va plus vite quand elle est proche d'un foyer de l'ellipse que quand elle est loin.



3. $3^{ème}$ loi de Kepler : relation entre la période de révolution et le demi grand axe :

Le rapport entre le carré de la période de révolution T d'une planète et le cube du demi-grand axe ($a = \frac{AA'}{2}$) de l'orbite elliptique est constant : $\boxed{\frac{T^2}{a^3} = cst}$



La valeur de la constante ne dépend que du Soleil (pas de la planète considérée)

Pour une trajectoire circulaire : on a $\frac{T^2}{r^3}$ = cte.

II. Le mouvement circulaire.

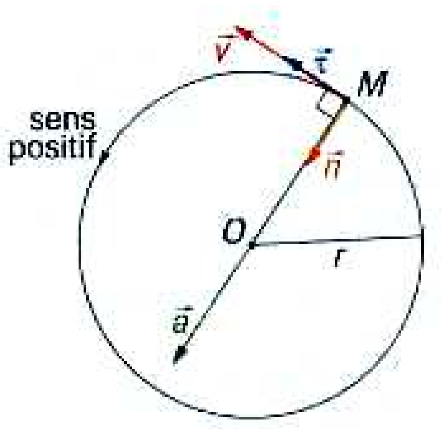
En première approximation, la trajectoire des planètes peut être assimilé à un cercle, et nous verrons un peu plus loin que ce mouvement a une particularité : il est uniforme !

1. Définition :

Un mouvement d'un point matériel est circulaire uniforme si sa trajectoire à la forme d'un cercle et si la valeur de sa vitesse sur la trajectoire est constante.

2. Rappel sur la base de Frenet.

Le repère le plus approprié pour étudier ce type de mouvement est le repère (ou base) de frenet :
Le repère de Frenet a pour origine le point M en mouvement et comporte 2 vecteurs unitaire $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ associé au point M décrivant une courbe



- $\vec{\tau}$ **vecteur tangent** à la trajectoire et dans le sens du mouvement
- $\vec{n}$ **vecteur centripète en M et normal** à la trajectoire (perpendiculaire à $\vec{\tau}$) dirigé vers le centre du cercle O.

Les deux axes tournent au même temps que le point matériel le long de sa trajectoire.

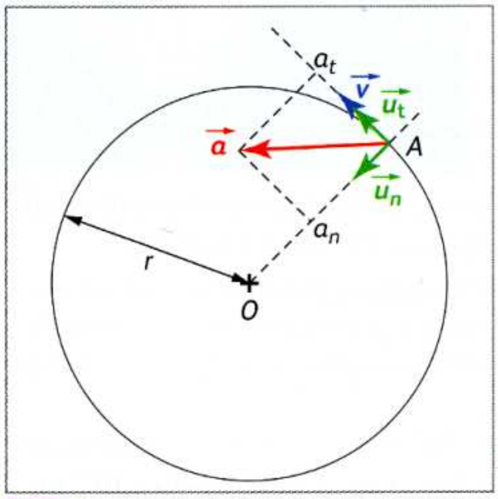
3. Coordonnées des vecteurs positions, vitesse et accélération

Dans le repère de Frenet les cordonnées des vecteurs position, vitesse et accélération d'un point animé d'un mouvement circulaire sont :

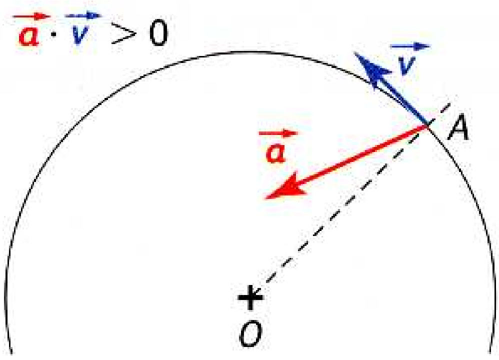
$$\overrightarrow{OM} = -r\,\vec{n} \qquad \vec{v} = v\,\vec{\tau} \qquad \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{r}\vec{n}$$

Soit :

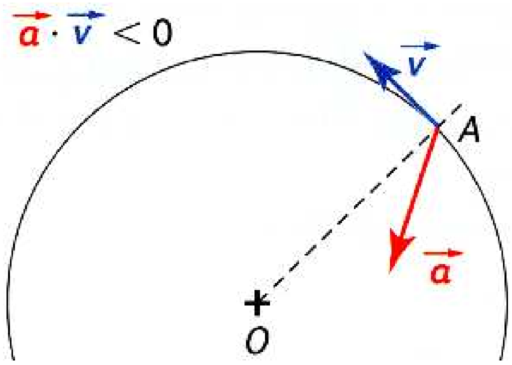
$$\overrightarrow{OM} : \begin{vmatrix} 0 \\ -r \end{vmatrix} \qquad \vec{v} : \begin{vmatrix} v_\tau = v \\ v_n = 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{a} : \begin{vmatrix} a_\tau = \dfrac{dv}{dt} \\ a_n = \dfrac{v^2}{r} \end{vmatrix}$$



9 *Vitesse et accélération dans le repère de Frenet.*



Mouvement circulaire accéléré



Mouvement circulaire ralenti

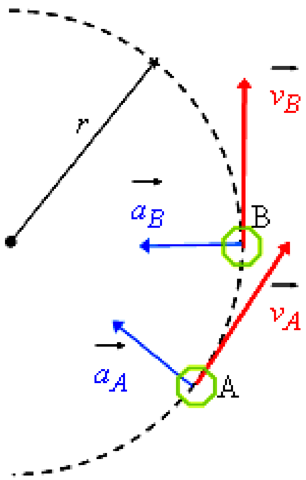
4. Cas des mouvements circulaires uniformes

Dans un mouvement circulaire uniforme la vitesse est constante, on a donc :

$$\frac{dv}{dt} = 0 \text{ et } \boxed{\vec{a} = \frac{v^2}{r}\vec{n}}$$

Ce vecteur accélération possède les caractéristiques suivantes :

- ✓ Point d'application : le point matériel considéré.
- ✓ Direction : normale à la trajectoire, **selon le vecteur normal $\vec{n}$.** On parle de direction normale ou de direction radiale. ($\vec{a}$ se confond avec le rayon du cercle)
- ✓ Sens : vers le centre de la trajectoire circulaire : $\vec{a}$ **est centripète**.
- ✓ Sa valeur : $a = \dfrac{v^2}{r}$ a en m.s^{-2} ; v en m.s^{-1} et r en m

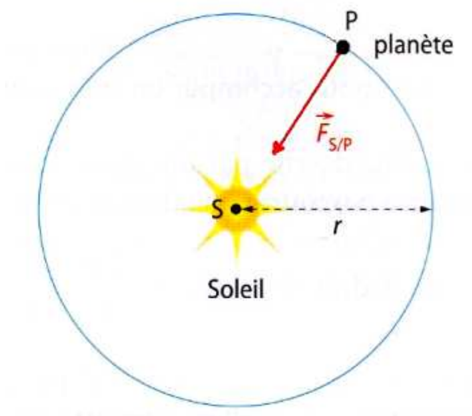


Si la vitesse est constante sur le cercle, le mobile va donc toujours parcourir sa trajectoire dans le même temps : le mouvement est périodique.

La période T du mouvement est égale à la durée d'un tour :

Vitesse = $\dfrac{\text{distance}}{\text{temps}}$ → temps = $\dfrac{\text{distance}}{\text{vistesse}}$; on a donc : $\boxed{T = \dfrac{2\pi r}{v}}$

III. Etude du mouvement d'une planète autour du soleil :



- **Référentiel :** héliocentrique considéré comme galiléen.
- **Système :** la planète considérée.
- **Force appliquée :** la force de gravitation exercée par le soleil sur la planète $F_{S/P} = G \times \frac{m_P m_S}{d^2}$

1. Application de la 2ème loi de Newton et étude du mouvement :

Dans la base de Frenet $(P, \vec{\tau}, \vec{n})$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_P \vec{a}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_P.(a_\tau.\vec{\tau} + a_n.\vec{n})$$

$$F_{S/P}.\vec{n} = m_P.(a_\tau.\vec{\tau} + a_n.\vec{n})$$

$$G \times \frac{m_P m_S}{r^2}\vec{n} = m_P.(a_\tau.\vec{\tau} + a_n.\vec{n})$$

$$\left| \begin{array}{l} 0 \\ G \times \frac{m_P m_S}{r^2} \end{array} \right. = m_P. \left| \begin{array}{l} a_\tau \\ a_n \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} 0 \\ G \times \frac{m_S}{r^2} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} a_\tau \\ a_n \end{array} \right.$$

Les coordonnées de l'accélération de la planète dans le référentiel de Frenet sont donc :

$$\vec{a} : \left| \begin{array}{l} a_\tau = 0 \\ a_n = G \times \frac{m_S}{r^2} \end{array} \right.$$

L'accélération de la planète dans son mouvement est **uniquement radiale** et **centripète.**

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est radiale et centripète, le mouvement circulaire uniforme apparaît donc comme l'une des solutions de l'application de la deuxième loi de Newton à une planète dans son mouvement autour du soleil.

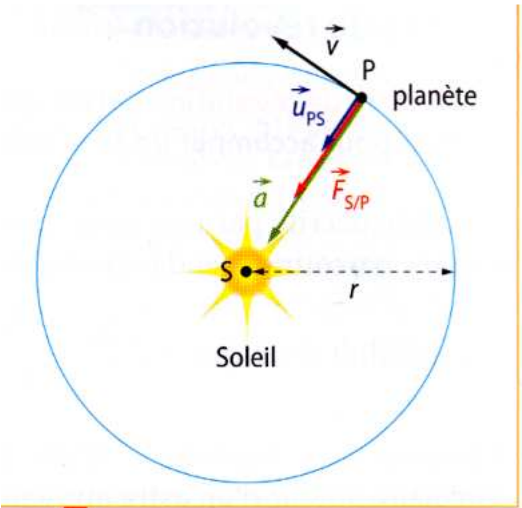


Fig. 4 Le vecteur accélération de la planète de centre P est dirigé vers le centre S du Soleil.

Ce qui donne : $\vec{a} : \left| \begin{array}{l} a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0 \\ a_n = \frac{v^2}{r} = G \times \frac{m_S}{r^2} \end{array} \right.$

2. Retour sur la 3ème loi de Kepler :

Reprenons l'expression de l'accélération normale obtenue ci-dessus : $\boxed{\frac{v^2}{r} = G\frac{m_S}{r^2}}$ (1)

- D'une part on peut obtenir une expression de la vitesse : $\boxed{\mathbf{v = \sqrt{G\times\frac{m_S}{r}}}}$
- D'autre part on peut retrouver la 3ème loi de Kepler :

Nous avons vu que l'expression de la période du mouvement circulaire uniforme est :

$T=\frac{2\pi r}{v}$ d'où $v=\frac{2\pi r}{T}$ en remplaçant dans l'expression (1) on a :

$\frac{4\pi^2 r^2}{rT^2} = G\frac{m_S}{r^2}$ d'où $\boxed{\mathbf{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_S} = cst}}$

Cette expression traduit donc la 3ème loi de Kepler pour une planète tournant autour du soleil selon une orbite circulaire.

La constante ne dépend que de la masse du soleil, astre attracteur.

IV. Etude du mouvement des satellites de la terre

1. Mouvement et grandeurs caractéristiques :

Application de la 2ème loi de Newton au satellite :

- **Référentiel :** pour le travail sur les satellites de la terre on va travailler dans le référentiel géocentrique considéré comme galiléen.
- **Système :** satellite (de masse m et d'altitude h)
- **Force appliquée :** la seule force qui s'exerce sur notre système satellite est la force d'attraction gravitationnelle exercée par la terre sur le satellite :

$$\boxed{\vec{F}_{T/sat} = G\times\frac{m\times m_T}{(R_T+h)^2}\vec{n}}$$

Cette force est radiale, dirigée vers le centre de la terre, elle nous permet d'obtenir (après application de la deuxième loi de Newton) l'expression de l'accélération normale :

$a_n = \frac{G\times m_T}{(R_T+h)^2}$

Le mouvement circulaire uniforme est donc aussi une solution possible pour le mouvement d'un satellite autour de la terre.

Grandeurs caractéristiques d'un satellite autour de la Terre :

- ✓ Vitesse du satellite : $\boxed{v = \sqrt{G\times\frac{m_S}{R_T+h}}}$
- ✓ Période de révolution du satellite : $T=\frac{2\pi(R_T+h)}{v}$ d'où $\boxed{T = 2\pi\times\sqrt{\frac{(RT+h)^3}{Gm_T}}}$

Ces deux grandeurs caractéristiques du mouvement du satellite ne dépendent que de l'altitude de celui-ci, elles ne dépendent pas de la masse du satellite.

2. Les satellites géostationnaires :

Comme leur nom l'indique, **ces satellites sont fixes (*stationnaire*) par rapport à la terre (*géo*).** Pour que ce soit le cas, il faut que :

- ✓ Ils décrivent un **mouvement circulaire uniforme** dans un plan perpendiculaire à l'axe des pôles terrestres. Ils évoluent donc dans un **plan contenant l'équateur**.
- ✓ Qu'ils **tournent dans le même sens que la terre** autour de l'axe des ses pôles.
- ✓ Leur **période de révolution soit exactement égale à la période de rotation de la terre** autour de l'axe de ces pôles (24H environ).

On peut calculer l'altitude à laquelle le satellite doit se situer pour satisfaire cette dernière condition :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_T} \quad \text{avec } r=R_T+h \qquad (3^{\text{ème}} \text{ loi de Kepler})$$

On a donc :

$$r=\sqrt[3]{\frac{Gm_T T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67.10^{-11}\times 5,976.10^{24}\times(24\times 3600)^2}{4\pi^2}} = 42,2.10^6\text{m}$$

$h = r - R_T = 42,2.10^6 - 6,4\ .10^6$
$= 36.10^6$m
$=$ <u>36000km</u>

3. Etat d'un corps situé dans un satellite en mouvement autour de la Terre :

On suppose que ce corps est tout d'abord lié au satellite. Alors lorsque le satellite est en orbite, l'objet est animé du même mouvement que le satellite.
Si on le libère à un instant t, celui-ci n'est plus soumis qu'à la force de gravitation exercée par la Terre.

D'après la loi de Newton, le satellite et l'objet qu'il contient sont soumis à la même accélération radiale qui ne dépend que de leur distance au centre de la terre.

Comme leur distance au centre de la Terre est égale, ils ont exactement le même mouvement, l'objet semble flotter dans le satellite. En fait, ils sont tous les deux animés du même mouvement de chute libre tout autour de la terre.

C'est l'état d'impesanteur !

Rq : On ne peut pas appliquer le principe d'inertie dans le référentiel du satellite car celui-ci n'est pas galiléen. En effet, l'objet est immobile par rapport au satellite, pourtant il n'est pas soumis à des forces qui se compensent !