CHAPITRE N°1 **PARTIE B** **TS**

LES OUTILS DE LA MECANIQUE CLASSIQUE

Introduction

Afin de décrire le mouvement d'un objet, il faut définir le système étudié et préciser le référentiel d'étude. On se limitera à des systèmes de dimensions très faibles par rapport à celle de leurs déplacements. Un tel système est modélisé par un point unique, qui contiendrait toute sa masse : on parle du modèle du point matériel.
Pour simplifier les écritures, l'étude est limitée aux mouvements plans (à deux dimensions) mais peut-être généralisée aux espaces à trois dimensions.

I. Comment choisir le référentiel d'étude ?

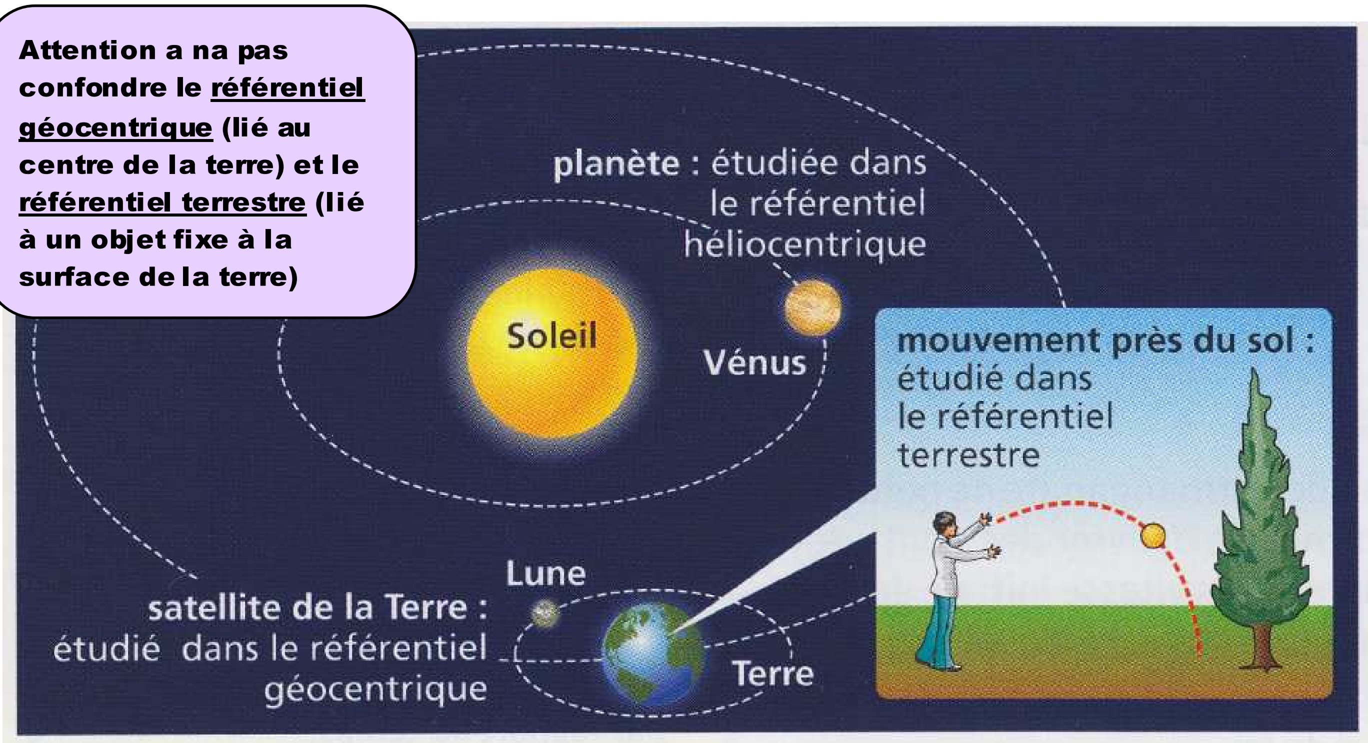
1. Notion de référentiel

Un référentiel est un objet par rapport auquel on étudie le mouvement

Référentiels usuels

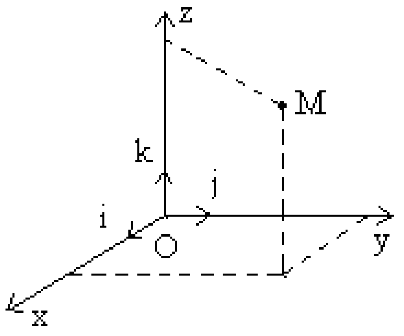
Référentiel	terrestre	géocentrique	héliocentrique
Référentiel adapté (considéré comme galiléen) pour l'étude d'un objet...	en mouvement au voisinage du sol terrestre	en mouvement autour de la Terre	en mouvement autour du Soleil

Attention a na pas confondre le <u>référentiel géocentrique</u> (lié au centre de la terre) et le <u>référentiel terrestre</u> (lié à un objet fixe à la surface de la terre)



A ce référentiel sont attachés 2 repères :
- **un repère d'espace**, choisi de tel sorte que la description du mouvement soit la plus simple possible
- **Un repère de temps** : l'origine des dates est souvent choisie afin de coïncider avec le début du mouvement.

2. Notion de repère d'espace

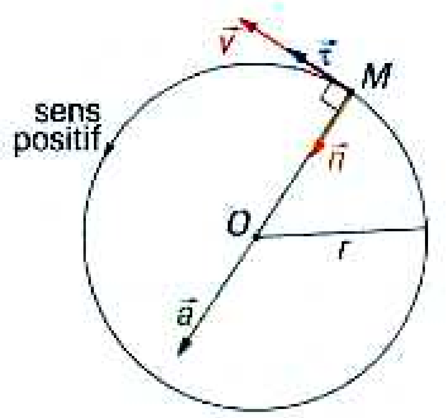


- **Le repère cartésien (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)**

Il a pour origine un point O fixe et pour vecteurs unitaire les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ constant

- **Le repère de frenet (M; $\vec{\tau}$, $\vec{n}$)**

Pour traiter les mouvements circulaires il est souvent plus simple d'utiliser un autre repère : il s'agit du repère de Frenet



Le repère de Frenet a pour origine le point M en mouvement et comporte 2 vecteurs unitaire $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ associé au point M décrivant une courbe

- $\vec{\tau}$ **vecteur tangent** à la trajectoire et dans le sens du mouvement
- $\vec{n}$ **vecteur centripète en M et normal** à la trajectoire (perpendiculaire à $\vec{\tau}$) dirigé vers le centre du cercle O.

Les deux axes tournent au même temps que le point matériel le long de sa trajectoire.

3. Centre d'inertie

Quand un solide est en mouvement de chute, il existe un point de ce solide qui décrit un mouvement plus simple que les autres : le centre d'inertie, noté G.
Lorsque l'étude du mouvement d'un solide est réduite à celle de son centre d'inertie, les informations relatives à la rotation du solide sur lui-même sont perdues.

II. Quels outils pour décrire le mouvement ?

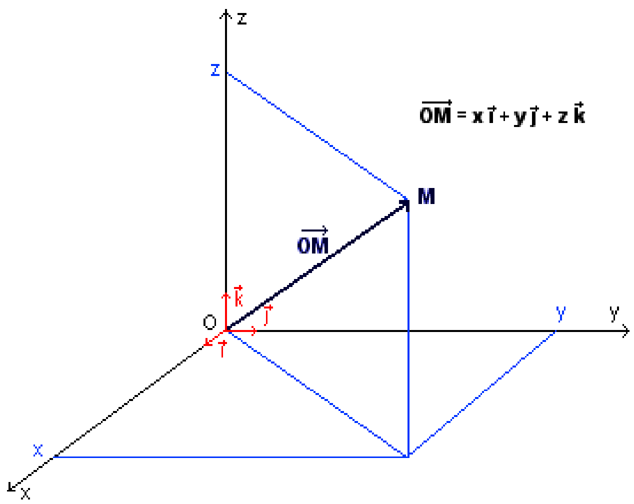
1. Le vecteur position

Dans un référentiel donné, la position d'un point M est repéré à chaque instant par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$

Dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ à pour coordonnée :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

Soit : $\overrightarrow{OM} : \begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{vmatrix}$



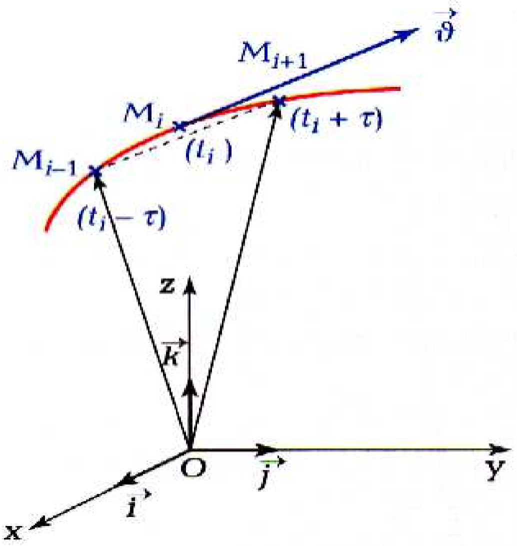
Ces trois coordonnées sont fonctions du temps et pour simplifier les notations, on pourra écrire : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ et : $\overrightarrow{OM} : \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$

On pourra simplifier de même l'écriture des grandeurs dépendant du temps.

2. Le vecteur vitesse

- **Vitesse moyenne**

La vitesse moyenne d'un point entre deux positions est la distance parcourue divisée par la durée du parcours



Le vecteur vitesse moyenne d'un point M à l'instant t_i lorsqu'il passe par la position M_i est donné par la relation : $\boxed{\vec{v}(t_i) = \dfrac{\overrightarrow{M_{i-1}M_{i+1}}}{\Delta t}}$ avec $\Delta t = 2\tau$

Or $\overrightarrow{M_{i-1}M_{i+1}} = \overrightarrow{OM}_{i+1} - \overrightarrow{OM}_{i-1} = \Delta\overrightarrow{OM}_i$

D'où: $\vec{v}(t_i) = \dfrac{\Delta\overrightarrow{OM}_i}{\Delta t}$

- **Vitesse instantanée**

La vitesse instantanée du point est égale à sa vitesse moyenne entre deux positions infiniment proches, soit lorsque Δt tend vers 0.

Par définition, le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}(t)$ est donc égal à la limite de $\dfrac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$ lorsque Δt tend vers zéro : $\boxed{\vec{v}(t_i) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\overrightarrow{OM}_i}{\Delta t} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)(t_i)}$

$\left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)(t_i)$ représente la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps à la date t_i

Dans un référentiel donné, à toute date t, le vecteur vitesse instantanée d'un point M est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

Dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ sont :

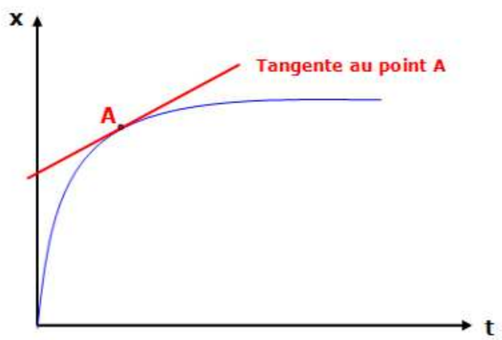
$$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy}{dt}\,\vec{j} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k}$$

soit: $\vec{v} : \left| \begin{array}{l} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{array} \right.$

Le vecteur vitesse instantanée en un point de la trajectoire a les caractéristiques suivantes :

- Origine : position M(t) occupé à l'instant t par le point mobile M
- Direction : la tangente à la trajectoire au point M(t).
- Sens : celui du mouvement.
- Valeur ou norme : $||\vec{v}(t)|| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ en $m.s^{-1}$



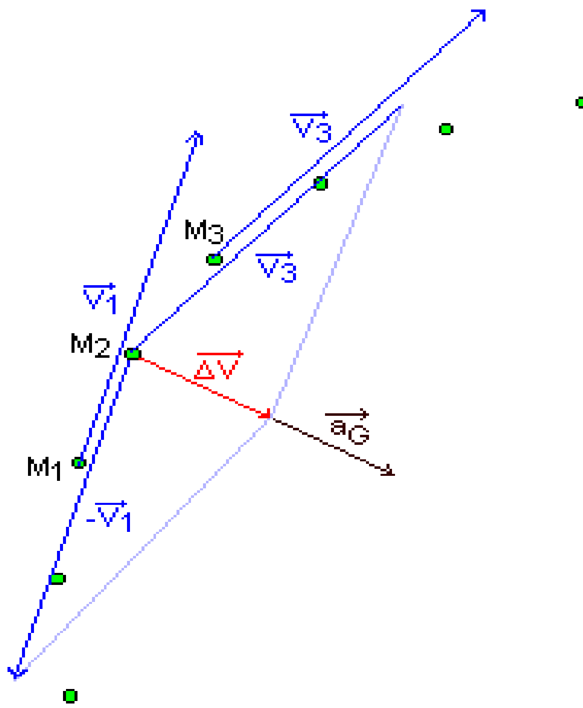
- **Remarque :**

A chaque instant le coefficient directeur de la tangente à la courbe x=f(t) donne la valeur de la vitesse v_x.

→ **Voir FICHE METHODE Vitesse et dérivée**

3. Le vecteur accélération

Le vecteur accélération caractérise la variation du vecteur vitesse en fonction du temps.



Le vecteur accélération d'un point M à l'instant t_i lorsqu'il passe par la position M_i est donné par la relation : $\boxed{\vec{a}(t_i) = \dfrac{\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}}{\Delta t}}$ avec $\Delta t = 2\tau$

Or $\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1} = \Delta \vec{v}$ d'où $\vec{a}(t_i) = \dfrac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t}$

Par définition, le vecteur accélération $\vec{a}_i(t)$ est égal à la limite de $\dfrac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t}$ lorsque t tend vers zéro :

$$\boxed{\vec{a}(t_i) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)(t_i)}$$

$\left(\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right)(t_i)$ représente la dérivée du vecteur vitesse $\vec{v}$ par rapport au temps à la date t_i

Dans un référentiel donné, à toute date t, le vecteur accélération d'un point M est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse instantanée $\vec{v}$:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

Soit : $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\vec{OM}}{dt}\right) = \dfrac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$

Dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}(t)$ sont :

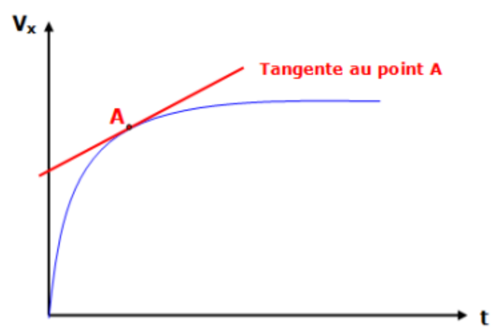
$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$$
$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$
$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

soit: $\vec{a}(t):\ \left|\begin{array}{l} a_x(t) = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ a_z(t) = \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{array}\right.$

Le vecteur accélération en un point de la trajectoire a les caractéristiques suivantes :
- Origine : position M(t) occupé à l'instant t par le point mobile M
- Direction : celle du vecteur $\Delta\vec{v}$
- Sens : celui du vecteur $\Delta\vec{v}$
- Valeur ou norme : $\|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ en $m.s^{-2}$

- **Remarque :**

A chaque instant le coefficient directeur de la tangente à la courbe $v_x = f(t)$ donne la valeur de l'accélération a_x.



4. Bilan :

Vecteur position	dérivée →	Vecteur vitesse	dérivée →	Vecteur accélération
$\overrightarrow{OG}(t)$	← primitive	$\vec{v}(t)=\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}(t)$	← primitive	$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}(t)$

5. Le vecteur quantité de mouvement.

- **Définition**

Deux balles de masses différentes et lancées avec la même vitesse ne parcourent pas la même distance. La masse est une caractéristique invariable d'un système et elle intervient dans une nouvelle grandeur devenue nécessaire pour étudier le mouvement : la quantité de mouvement.

Le vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un point matériel est égal au produit de sa masse m par son vecteur vitesse $\vec{v}$:

$$\boxed{\vec{p} = m.\vec{v}}$$

Le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel a les caractéristiques suivantes :

- Origine : position M(t) occupé à l'instant t par le point mobile M
- Direction : celle du vecteur vitesse $\vec{v}$
- Sens : celui du vecteur $\vec{v}$
- Valeur ou norme : $||\vec{p}(t)|| = m.||\vec{v}(t)||$ = en kg.m.s^{-1}

- **Remarque :**

La quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un système constitué de plusieurs corps est égale à la somme des quantités de mouvement de chacun des corps du système :

$$\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2} + \ldots = \sum_{i=1}^{n} \vec{p_i}$$

- **Loi de conservation de la quantité de mouvement**

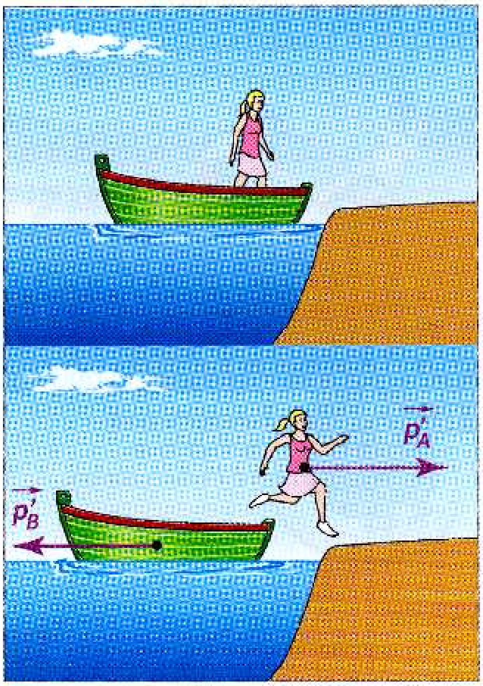
La loi de conservation de la quantité de mouvement est une loi fondamentale de la mécanique qui permet d'étudier le cas d'un système isolé* ou pseudo isolé** constitué de plusieurs corps, qu'il soit déformable ou non

Dans un référentielle galiléen, le vecteur quantité de mouvement d'un système isolé ou pseudo isolé est un vecteur constant :

$$\boxed{\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2} + \ldots = \sum_{i=1}^{n} \vec{p_i} = cst}$$

*Un système est dit isolé s'il n'est soumis à aucune action mécanique extérieure.
**Un système est pseudo isolé si les actions mécaniques qui s'exercent sur lui se compensent.

- **Application à la propulsion par réaction**



17 *Conservation de la quantité de mouvement lors de la propulsion par réaction d'une barque.*

Cette loi permet d'étudier les collisions et les phénomènes de recul ou de propulsion lors de l'explosion (ou éclatement) de systèmes.

Lorsque l'on saute d'une barque immobile pour rejoindre la berge, la barque s'éloigne du bord : expliquons ce phénomène à l'aide de la loi de conservation de la quantité de mouvement **(document 16)**.

Dans le référentiel terrestre, considéré galiléen pendant la durée de l'expérience, le système {personne (notée A) ; barque (notée B)} supposé immobile avant le saut, est isolé. La quantité de mouvement $\vec{p}$ de ce système est donc nulle puisqu'il est immobile :

$$\vec{p}_A = \vec{p}_B = \vec{0}, \text{ d'où } \vec{p} = \vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{0}.$$

Juste après le saut, on note $\vec{p'}_A$ la quantité de mouvement de la personne, $\vec{p'}_B$ celle de la barque et $\vec{p'}$ celle du système complet.

D'après la loi de conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{p} = \vec{p'} \text{ donc } \vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p'}_A + \vec{p'}_B = \vec{0} \text{ et ainsi } \vec{p'}_A = -\vec{p'}_B.$$

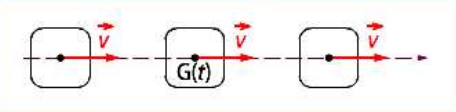
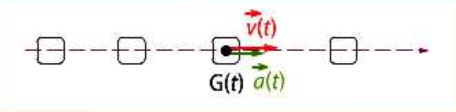
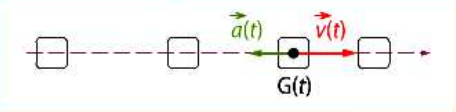
Après le saut, les vecteurs quantité de mouvement de A et de B sont opposés, donc les vitesses de A et de B sont de sens opposés : la barque s'éloigne de la berge au moment du saut. On dit qu'il y a **propulsion par réaction (document 17)**.

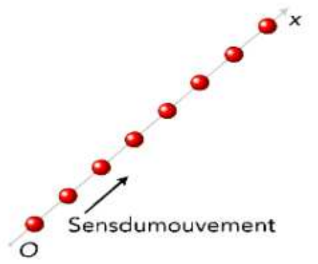
Remarque. À quantité de mouvement identique communiquée à une barque ou à une péniche, l'influence de leur masse dans l'expression $p = mv$ explique la différence des reculs observés (important pour la barque, insignifiant pour la péniche).

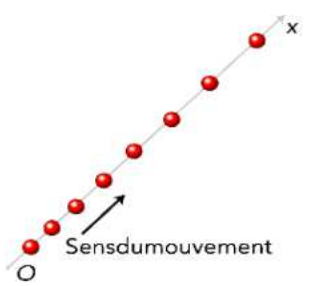
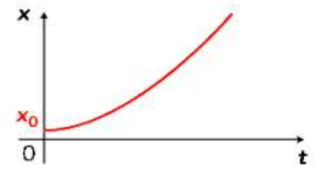
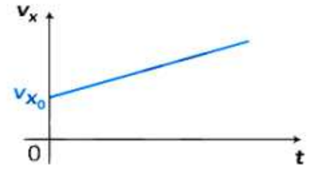
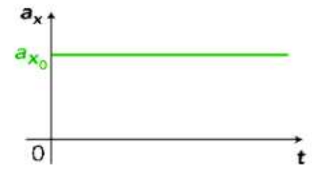
II. Mouvements rectilignes et circulaires

Un mouvement est rectiligne si la trajectoire est une droite.

Un mouvement rectiligne est caractérisé par les vecteurs vitesse et accélération :

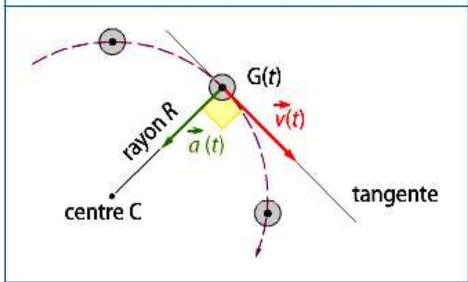
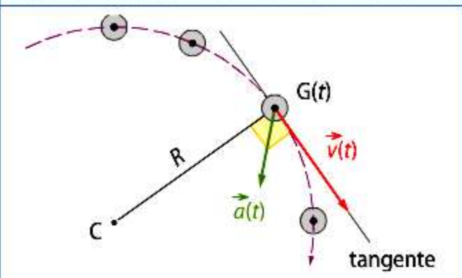
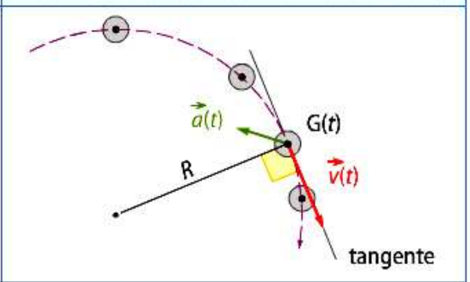
Mouvement rectiligne uniforme	Mouvement rectiligne uniformément accéléré	Mouvement rectiligne uniformément ralenti
		
Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est constant au cours du temps : $\vec{v}(t) = \vec{v} = \overrightarrow{\text{constante}}$. $\vec{a} = \vec{0}$ donc $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$.	Le vecteur accélération est constant au cours du temps : $\vec{a}(t) = \vec{a} = \overrightarrow{\text{constante}}$. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont de même sens. La valeur de v augmente. $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$.	Le vecteur accélération est constant au cours du temps : $\vec{a}(t) = \vec{a} = \overrightarrow{\text{constante}}$. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont de sens opposés. La valeur de v diminue. $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$.

Chronophotographie d'un mouvement rectiligne uniforme sur un axe (Ox)	Représentation graphique de la coordonnée x de la position en fonction du temps	Représentation graphique de la coordonnée v_x de la vitesse en fonction du temps	Représentation graphique de la coordonnée a_x de l'accélération en fonction du temps
	 Équation de la représentation graphique : $x(t) = v_{x_0} \cdot t + x_0$	 Équation de la représentation graphique : $v_x(t) = v_{x_0}$	 Équation de la représentation graphique : $a_x(t) = 0$

Chronophotographie du mouvement	Représentation graphique de la coordonnée x en fonction du temps	Représentation graphique de la coordonnée v_x en fonction du temps	Représentation graphique de la coordonnée a_x en fonction du temps
	 Équation de la représentation graphique : $x(t) = \frac{1}{2} \cdot a_{x_0} \cdot t^2 + v_{x_0} \cdot t + x_0$	 Équation de la représentation graphique : $v_x(t) = a_{x_0} \cdot t + v_{x_0}$	 Équation de la représentation graphique : $a_x(t) = a_{x_0}$

Un mouvement est circulaire si la trajectoire est un cercle.

Il est caractérisé par les vecteurs vitesse et accélération :

Mouvement circulaire uniforme	Mouvement circulaire uniformément accéléré	Mouvement circulaire uniformément ralenti
		
Le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ varie mais sa valeur v reste constante. Le vecteur accélération $\vec{a}$ est dirigé vers le centre de la trajectoire. $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$.	Le vecteur accélération est constant au cours du temps : $\vec{a}(t) = \vec{a} = \overrightarrow{\text{constante}}$. Il est toujours dirigé vers l'**intérieur** de la trajectoire. La valeur de la vitesse v augmente. $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$.	Le vecteur accélération est constant au cours du temps : $\vec{a}(t) = \vec{a} = \overrightarrow{\text{constante}}$. Il est toujours dirigé vers l'**intérieur** de la trajectoire. La valeur de la vitesse v diminue. $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$.

III. Les lois de Newton

1. Première loi de Newton : énoncé du principe d'inertie :

Dans un référentiel galiléen, si la somme des forces extérieures appliquées à un système mécanique est nulle, son centre d'inertie G est au repos ou a un mouvement rectiligne uniforme. La réciproque est vraie, d'où :

$$\boxed{\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{0} \text{ est équivalent à } \overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{cst}}$$

La première loi de Newton ne s'applique qu'au centre d'inertie du solide. Elle ne dit rien sur le mouvement des autres points.
Le principe d'inertie ne s'applique que dans certain référentiels appelés galiléens.
Pour une expérience de courte durée le référentiel terrestre est considéré comme galiléen. Un référentiel est galiléen si le principe d'inertie est vérifié.

2. La deuxième loi de Newton (principe fondamental de la dynamique) :

Dans un référentiel Galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures exercées sur un système mécanique de masse m est égale à la dérivée par rapport au temps de son vecteur quantité de mouvement $\overrightarrow{p(t)}$

$$\boxed{\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\overrightarrow{p_G}}{dt}(t)}$$

Si la masse du système est constante cette relation devient :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\left(m.\overrightarrow{v_G}\right)}{dt} = m.\frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt}$$

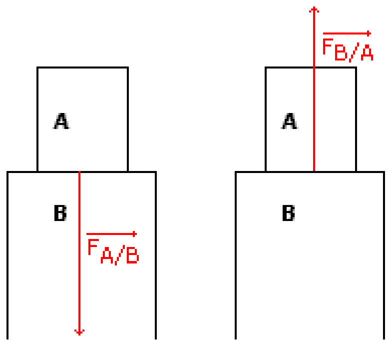
$$\boxed{\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a_G}}$$

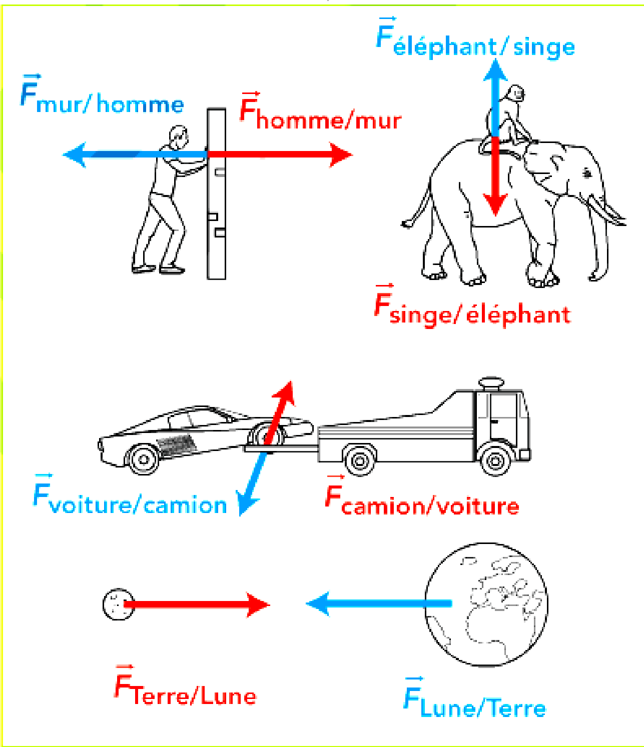
Si $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{0}$ et, par conséquent, v_G reste constant en direction, sens et norme (on retrouve la première loi de Newton).

3. La troisième loi de newton : principe des actions réciproques

Deux corps en interaction exercent l'un sur l'autre des forces opposées :
La force $\overrightarrow{F_{A/B}}$ exercée par le corps A sur le corps B et la force $\overrightarrow{F_{B/A}}$ exercée par le corps B sur le corps A ont même direction, même valeur mais des sens opposés :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{A/B}} = -\ \overrightarrow{F_{B/A}}}$$




$\vec{F}_{\text{mur/homme}}$
$\vec{F}_{\text{homme/mur}}$
$\vec{F}_{\text{éléphant/singe}}$
$\vec{F}_{\text{singe/éléphant}}$
$\vec{F}_{\text{voiture/camion}}$
$\vec{F}_{\text{camion/voiture}}$
$\vec{F}_{\text{Terre/Lune}}$
$\vec{F}_{\text{Lune/Terre}}$